11. 一次分数変換

H^+ での一次分数変換

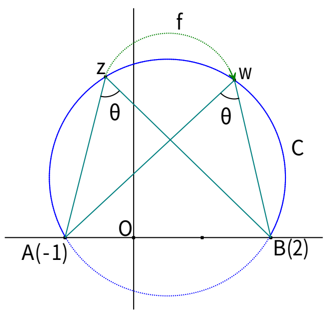
$$f: \quad \omega = \frac{az+b}{cz+d} \quad (a,b,c,d \text{ は実数}, \ ad-bc>0)$$

は，その固定点によって 3 つに分類できます．

11.1. 一次分数変換のタイプ ($c \neq 0$ のとき)

11.1.1. 例 1 (双曲型)

$$\boxed{f: \ \omega = \frac{5z+2}{z+4} \quad \cdots(*)}$$



不動点は，$z = \dfrac{5z+2}{z+4}$ より $z=-1,2$． (*)より，

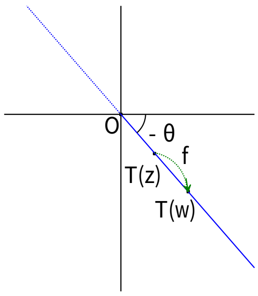
$$\begin{cases} \omega+1 = \dfrac{5z+2}{z+4}+1 = \dfrac{6(z+1)}{z+4} & \cdots① \\ \omega-2 = \dfrac{5z+2}{z+4}-2 = \dfrac{3(z-2)}{z+4} & \cdots② \end{cases}$$

①，②より，

$$\frac{\omega+1}{\omega-2} = 2\cdot\frac{z+1}{z-2} \quad \cdots③$$

これを f の**標準形**と言います． $T(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$ とおくと，

$$T(\omega) = 2\cdot T(z) \quad \cdots③'$$



元の複素平面と図形を T で移した平面を**双対平面**と呼ぶと，双対平面上では， f は，

「O を中心とする相似比が 2 の相似変換」

です．故に，双対平面に於ける f の不動曲線を C' とすると，C' は，原点を通る直線です．

（C' 上の点は全て C' へ移ります.）この C' を $T^{-1}(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$ で戻すと，元の平面に於ける f の不動曲線 $C = T^{-1}(C')$ が得られます．

実際には，もっと簡単に C が見つかります．即ち，C' は，原点を通る直線だから，

$$\arg\left(T(w)\right)=\arg\left(T(z)\right)\Longleftrightarrow \arg\left(\frac{\omega+1}{\omega-2}\right)=\arg\left(\frac{z+1}{z-2}\right)\quad (=-\theta \text{ と置く})$$

これは，A(−1), B(2) としたとき，

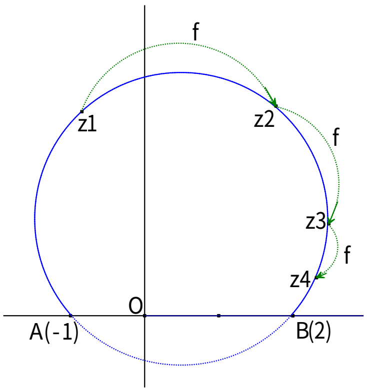
$$\angle \mathrm{AzB}=\angle \mathrm{A}w\mathrm{B}=\theta$$

を表します．よって，C は「A と B を通る円の一部(円弧 AzB)」です．

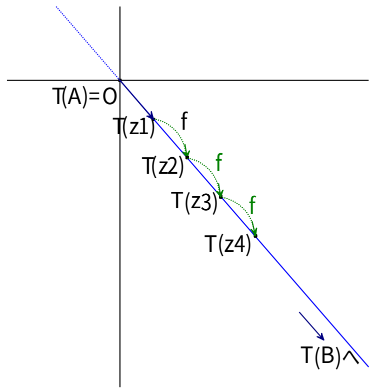
すなわち，$z_1 \xrightarrow{f} z_2 \xrightarrow{f} z_3 \cdots$ のようにして，点列 $\{z_n\}$ を作ると，z_n は C 上に並びます．

さらに，「$\mathrm{T}(-1)=O,\quad \mathrm{T}(2)=\infty$」ですから，点 z_n が C 上を A から B まで動くと，$\mathrm{T}(z_n)$ は，原点から伸びる半直線上を動きます．

また，C は「A,B を通る**双曲的直線**または **等距離線**」です．



[元の複素数平面上での動き]



[T で移した双対平面上での動き]

CabriⅡによる検証 (双曲型)

Drag　z,C　　example1.html

【注】T(x) 以外の変換で「標準形」を見る方法　（CabriⅡで簡単に見る方法）

$T(x)=\dfrac{x+1}{x-2}$ を CabriⅡで作図するのは，やや面倒ですが，もっと簡単に標準形（もどき）を見ることができる変換があります．

②式の逆数を取って，

$$\omega=\frac{5z+2}{z+4}\Longleftrightarrow\omega-2=\frac{3(z-2)}{z+4}\Longleftrightarrow\frac{1}{\omega-2}=\frac{2}{z-2}+\frac{1}{3}\cdots②'$$

よって，$S(x)=\dfrac{1}{x-2}$ とおくと，

$$S(\omega)=2S(z)+\frac{1}{3}\Longleftrightarrow S(\omega)+\frac{1}{3}=2\left(S(z)+\frac{1}{3}\right)\cdots④$$

すなわち，S(z) はS(ω) を点$\left(-\dfrac{1}{3}\right)$を中心に 2 倍拡大した点です. このように「$S(x)=\dfrac{1}{x-2}$」，或いは「B(2)が中心の円 K に関する鏡像変換」(CabriⅡなら とても簡単!)　で移しても，本質的には$T(x)$で移すのと同じです.

そして $S(x)$で移すことは，$T(x)$を 2 回に分けるようなものです．実際，

$$S(x)+\frac{1}{3}=\frac{1}{x-2}+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{x+1}{x-2}=\frac{1}{3}\cdot T(x)$$

よって ④より，

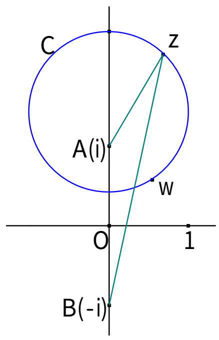
$$\frac{1}{3}\cdot T(\omega)=2\cdot\frac{1}{3}\cdot T(z)\Longleftrightarrow T(\omega)=2\cdot T(z)$$

つまり，「$S(x)$」と「平行移動：$h(x)=x+\dfrac{1}{3}$」の合成が 「$T(x)$」です.

「$S(x)$」で本質的な変換を済ませ，$h(x)$で「相似の中心」を原点に移します.

11.1.2. 例 2（楕円型）

$$\boxed{f:\ \omega=\frac{z-1}{z+1}\quad\cdots(*)}$$

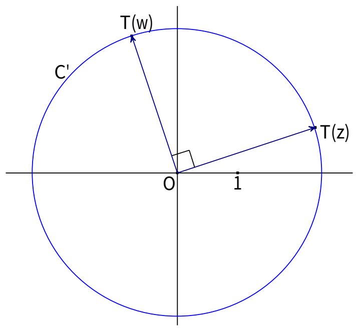


不動点は，$z=\dfrac{z-1}{z+1}$ より $z=\pm i$．(*)より，

$$\begin{cases}\omega+i &= \dfrac{z-1}{z+1}+i=\dfrac{(1+i)(z+i)}{z+1} \quad\cdots①\\ \omega-i &= \dfrac{z-1}{z+1}-i=\dfrac{(1-i)(z-i)}{z+1} \quad\cdots②\end{cases}$$

①，②より，

$$\frac{\omega+i}{\omega-i}=\frac{1+i}{1-i}\cdot\frac{z+i}{z-i}=i\cdot\frac{z+i}{z-i}\quad\cdots③$$



これが f の**標準形**となります．$T(x)=\dfrac{x+i}{x-i}$ とおくと，

$$T(\omega)=i\cdot T(z)\quad\cdots③'$$

よって，双対平面上では，f は，

「O を中心とする 90 度の回転」

です．故に，双対平面に於ける f の不動曲線を C' とすると，C' は，原点を中心とする円です．この C' を $T^{-1}(x)$ で戻すと，元の平面に於ける f の不動曲線 $C=T^{-1}(C')$ が得られます．

実際には，もっと簡単に C が見つかります．即ち，C' は，原点を中心とする円だから，

$$|T(w)|=|T(z)| \Longleftrightarrow \left|\frac{w+i}{w-i}\right|=\left|\frac{z+i}{z-i}\right| \quad (=r\ と置く)$$

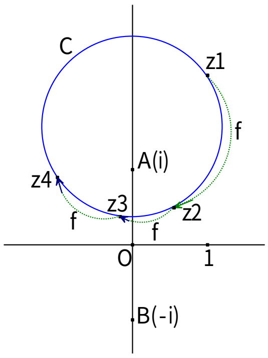
です．これは，$\mathrm{A}(i),\mathrm{B}(-i),\mathrm{P}(z),\mathrm{Q}(w)$ としたとき，

$$\mathrm{AP}:\mathrm{BP}=1:r,\quad \mathrm{AQ}:\mathrm{BQ}=1:r$$

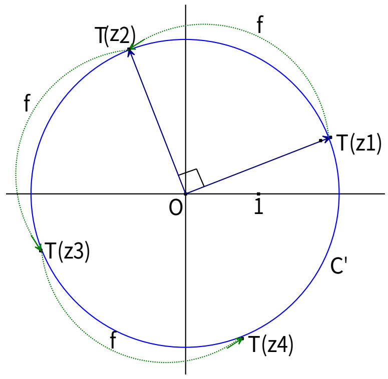
を表します．即ち，C は「A,B からの距離の比が等しい点の集合(アポロニウスの円)」です．

よって，$z_1\xrightarrow{f}z_2\xrightarrow{f}z_3\cdots$ のようにして，点列 $\{z_n\}$ を作ると，z_n は C 上に並びます．

また，C は「A を中心とする**双曲的円**」です．



[元の複素数平面上での動き]



[T で移した双対平面上での動き]

CabriⅡによる検証 (楕円型)

Drag　z,D　 example2.html

【注】T(x) 以外の変換で「標準形」を見る方法　（CabriⅡで簡単に見る方法）

例 1 と同様です．　「$\omega-i=\dfrac{(1-i)(z-i)}{z+1}\cdots②$」　より，　$\dfrac{1}{\omega-i}=\dfrac{i}{z-i}+\dfrac{1}{1-i}$

$S(x)=\dfrac{1}{x-i}$ とおくと，

$$S(\omega)=i\cdot S(z)+\frac{1}{1-i}\Longleftrightarrow S(\omega)-\frac{i}{2}=i\left(S(z)-\frac{i}{2}\right)\cdots④$$

故に，S(z) は S(ω) を点$\left(\dfrac{i}{2}\right)$を中心に 90° 回転した点です．　よって「$S(x)=\dfrac{1}{x-i}$」 或いは「中心が B(i)の円に関する鏡像変換」で移しても，本質的には $T(x)$ で移すのと同じです．

そして $S(x)$ で移すことは，$T(x)$ を 2 回に分割することです．実際，

$$S(x)-\frac{i}{2}=\frac{1}{x-i}-\frac{i}{2}=-\frac{i}{2}\cdot\frac{x+i}{x-i}=-\frac{i}{2}\cdot T(x)$$

よって ④より，

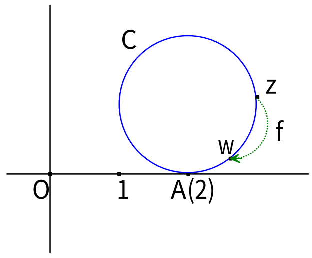
$$-\frac{i}{2}\cdot T(\omega)=i\cdot\left(-\frac{i}{2}\right)\cdot T(z)\Longleftrightarrow T(\omega)=i\cdot T(z)$$

つまり，$S(x)$ と「平行移動：$h(x)=x-\dfrac{i}{2}$」の合成が，$T(x)$ です．

「$S(x)$」で本質的な変換を済ませ，$h(x)$ で「回転の中心」を原点に移します．

11.1.3. 例 3（放物型)

$$\boxed{f:\ \omega=\frac{3z-4}{z-1}\quad\cdots(*)}$$

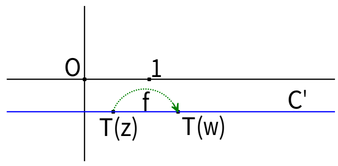


不動点は，$z=\dfrac{3z-4}{z-1}$ より $z=2$ (重解)． (*)より，

$$\omega-2=\frac{3z-4}{z-1}-2=\frac{z-2}{z-1}\quad\cdots①$$

①より，

$$\frac{1}{\omega-2}=\frac{z-1}{z-2}=\frac{1}{z-2}+1\quad\cdots②$$



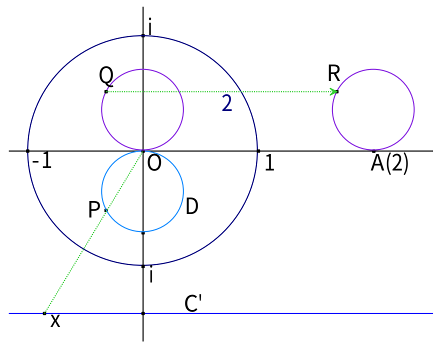
これが f の標準形となります． $T(x)=\dfrac{1}{x-2}$ とおくと，

$$T(\omega)=T(z)+1\quad\cdots②'$$

よって，双対平面上では， f は，

「実軸に平行な 平行移動」

です．ゆえに，双対平面に於ける f の不動曲線 C' は，実軸に平行な直線です．この C' を「$T^{-1}(x)=\dfrac{1}{x}+2$」で戻すと，元の平面に於ける f の不動曲線 $C=T^{-1}(C')$ が得られます．



[P,Q,R は，順に $\mathrm{S}(x)$, $\overline{\mathrm{S}(x)}$, $\mathrm{T}^{-1}(x)$]

ここで $S(x)=\dfrac{1}{\overline{x}}$ とおくと，S は $|z|=1$ に関する鏡像で，S により，C' は，原点に於いて実軸に接する円 D に移ります．「$T^{-1}(x)=\overline{S(x)}+2$」ですから，C は，

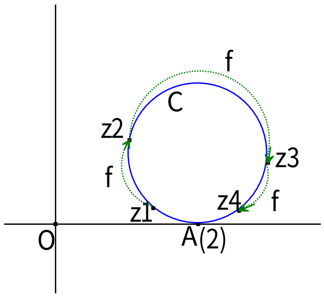
点 A(2) に於いて実軸に接する円

となります．

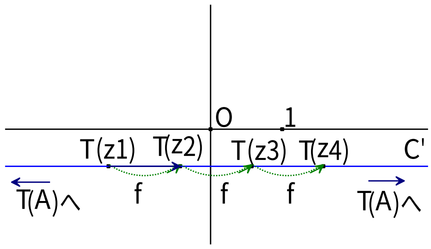
すなわち，$z_1 \xrightarrow{f} z_2 \xrightarrow{f} z_3 \cdots$のようにして，点列$\{z_n\}$を作ると，$z_n$はC上に並びます．

さらに「$T(2)=\infty$」ですから，点z_nがC上をAから一周すると，$T(z_n)$は，C'上を端から端まで動きます．

また，C は 「無限遠点がAの双曲的直線を軸とする極限円」です．



[元の複素数平面上での動き]



[Tで移した双対平面上での動き]

CabriⅡによる検証 (放物型)

Drag　z,C　 example3.html

11.1.4.　一次分数変換の分類（$c \neq 0$ のとき）

一般に，$c \neq 0$ のとき，H^+ での一次分数変換

$$f:\quad \omega = \frac{az+b}{cz+d} \quad (a, b, c, d \text{ は実数}, c \neq 0, ad-bc>0)$$

の固定点は

$$z = \frac{az+b}{cz+d} \quad \Longleftrightarrow \quad cz^2+(d-a)z-b=0 \ \cdots(**)$$

の解です．　それは「異なる 2 実数解」,「重解」,「共役な 2 虚数解」のいずれかです．

(i) (*)が異なる 2 解 α, β を持つとき．

α, β は固定点だから，

$$\alpha = \frac{a\alpha+b}{c\alpha+d}\ ,\quad \beta = \frac{a\beta+b}{c\beta+d}$$

よって，

$$\begin{cases} \omega-\alpha = \dfrac{az+b}{cz+d} - \dfrac{a\alpha+b}{c\alpha+d} = \dfrac{(ad-bc)(z-\alpha)}{(cz+d)(c\alpha+d)} & \cdots① \\ \omega-\beta = \dfrac{az+b}{cz+d} - \dfrac{a\beta+b}{c\beta+d} = \dfrac{(ad-bc)(z-\beta)}{(cz+d)(c\beta+d)} & \cdots② \end{cases}$$

①，②より，

$$\frac{\omega-\alpha}{\omega-\beta} = \frac{c\beta+d}{c\alpha+d}\cdot\frac{z-\alpha}{z-\beta} \quad \cdots③$$

よって，「$T(x) = \dfrac{x-\alpha}{x-\beta}$, $k = \dfrac{c\beta+d}{c\alpha+d}$」とおくと，

$$\mathrm{T}(\omega) = k\cdot\mathrm{T}(z) \quad \cdots③'$$

これが，f の**標準形**です．ここで，解と係数の関係より，

$$(c\alpha+d)(c\beta+d) = c^2\alpha\beta + cd(\alpha+\beta)+d^2$$
$$= c^2\left(-\frac{b}{c}\right) + cd\left(\frac{a-d}{c}\right) + d^2 = ad-bc>0 \quad \cdots④$$

したがって，

$$\begin{cases} (\text{ア})\ \alpha, \beta \text{ が異なる 2 実数の時，} \quad k>0 \\ (\text{イ})\ \alpha, \beta \text{ が共役な 2 虚数の時，} \quad |k|=1,\ k \neq 1 \quad (k = \cos\theta + i\sin\theta,\ k\neq 1) \end{cases}$$

(ア)のとき，双対平面では，f は「**原点を中心とする相似比が** k $(k>0)$ **の相似変換**」です．
(イ)のとき，双対平面では，f は「**原点を中心とする** θ $(\theta \neq 0)$ **の回転**」です．
(ア)のタイプは「双曲型」，(イ)のタイプは 「楕円型」と呼ばれます．

(ii) (**)が重解 α を持つとき.

(i)の場合と同様にして,

$$\omega-\alpha=\frac{az+b}{cz+d}-\frac{a\alpha+b}{c\alpha+d}=\frac{(ad-bc)(z-\alpha)}{(cz+d)(c\alpha+d)}\quad\cdots①$$

しかし, α は重解なので, β を使う式は立てられません. よって, 逆数を取って,

$$\frac{1}{\omega-\alpha}=\frac{(cz+d)(c\alpha+d)}{(ad-bc)(z-\alpha)}=\left(c+\frac{c\alpha+d}{z-\alpha}\right)\cdot\frac{c\alpha+d}{ad-bc}=\frac{1}{z-\alpha}\cdot\frac{(c\alpha+d)^2}{ad-bc}+\frac{c(c\alpha+d)}{ad-bc}\cdots②$$

前項の④式は $\alpha=\beta$ の時でも成り立つので,

$$(c\alpha+d)^2=ad-bc\quad\cdots③$$

ゆえに,

$$\frac{1}{\omega-\alpha}=\frac{1}{z-\alpha}+\frac{c}{c\alpha+d}\quad\cdots④$$

よって,「$T(x)=\dfrac{1}{x-\alpha}$, $k=\dfrac{c}{c\alpha+d}$」とおくと,

$$\mathrm{T}(\omega)=\mathrm{T}(z)+k\quad\cdots④'$$

これが f の**標準形**です.「$ad-bc>0,\ c\neq0$」より「k は 0 でない実数」となります. 即ち,

(ウ) (**)が重解を持つとき.　双対平面では, f は「**実軸に平行な向きの　平行移動**」です.

このタイプは「放物型」と呼ばれます.

11.2. 一次分数変換のタイプ　($c=0$ のとき)

一次分数変換：

$$f: \quad \omega=\frac{az+b}{cz+d} \quad (a,b,c,d \text{ は実数}, \ ad-bc>0)$$

に於いて，$c=0$ のとき，$ad-bc=ad>0$

$$f: \ \omega=\frac{az+b}{d}=\frac{a}{d}\cdot z+\frac{b}{d}$$

ここで，「$\dfrac{a}{d}=p$,　$\dfrac{b}{d}=q$」とおくと，$ad>0$ だから「$p>0$」．よって，

$$f: \ \omega=pz+q \quad (p>0) \ \cdots(*)$$

(i) $p\neq 1$ $(a\neq d)$ のとき，

方程式「$\alpha=p\alpha+q$」は　解 $\alpha=\dfrac{q}{1-p}=\dfrac{b}{d-a}$ を持ちます．これが固定点です．(*)から，

$$\omega-\alpha=p(z-\alpha)$$

よって「$\mathrm{T}(x)=x-\alpha$」とおくと，

$$\mathrm{T}(\omega)=p\cdot\mathrm{T}(z)$$

これが，f の**標準形**です．双対平面上では，f は「**原点が中心で，相似比が正の相似変換**」です．このような場合も「双曲型」と呼びます．

例えば,「$f:\omega=3z-2$」は, 標準形が「$\omega-1=3(z-1)$」で, 双曲型です. この変換は「A(1) を中心とした相似比が 3 の相似変換」となります.

(ii) $p=1$ $(a=d)$ のとき，

f は,

$$\omega=z+q \quad \cdots(**)$$

(**)自体が，f の**標準形**です．また，f は「**実軸に平行な向きの 平行移動**」を表します．この場合も「放物型」と呼ばれます．例えば 「$\omega=z+2$」は，放物型です．

$c=0$ のときは,「双曲型」と「放物型」だけで,「楕円型」はありません.

11.3. 【寄り道】一般の一次分数変換 (双曲的合同変換とは限らない)

今度はa,b,c,dが実数とは限りません．しかし，定数関数にならないため $ad-bc\neq 0$ です．

$$f:\quad \omega=\frac{az+b}{cz+d}\quad (ad-bc\neq 0)\quad \cdots(*)$$

有限な不動点は，次の方程式の解です．

$$z=\frac{az+b}{cz+d}\iff cz^2+(d-a)z-b=0\quad \cdots(**)$$

不動点を利用して，**標準形**（#）に直せます．

Ⅰ．$c\neq 0$のとき，

（A）異なる複素数α,βを解に持つ時．　「$T(x)=\dfrac{x-\alpha}{x-\beta}$，$k=\dfrac{c\beta+d}{c\alpha+d}$」とおくと，

$$\mathrm{T}(\omega)=k\cdot\mathrm{T}(z)\ \cdots(\#)$$

(B) 複素数αを重解に持つ時．　「$T(x)=\dfrac{1}{x-\alpha}$，$k=\dfrac{c}{c\alpha+d}$」とおくと，

$$\mathrm{T}(\omega)=\mathrm{T}(z)+k\quad \cdots(\#)$$

Ⅱ．$c=0$のとき，

(C) $a\neq d$ならば，「$T(x)=x-\alpha=x-\dfrac{b}{d-a}$，$k=\dfrac{a}{d}$」とおくと

$$\mathrm{T}(\omega)=k\cdot\mathrm{T}(z)\quad \cdots(\#)$$

(D) $a=d$ならば，「$T(x)=x$，$k=\dfrac{b}{d}$」とおくと，

$$\mathrm{T}(\omega)=\mathrm{T}(z)+k\quad \cdots(\#)$$

標準形が 「$\mathrm{T}(\omega)=k\cdot\mathrm{T}(z)$」のタイプで，

$k>0,\ k\neq 1$のとき，双曲型．　$|k|=1$のとき，楕円型．　それ以外のとき，斜航型

また，標準形が，「$\mathrm{T}(\omega)=\mathrm{T}(z)+k$」のタイプは，放物型 と呼ばれます．

双曲型は「**相似比が正の相似変換**」と，楕円型は「**回転移動**」と，放物型は「**平行移動**」（実軸に平行な移動とは限らない）と，それぞれ共役です．斜航型は，一般に「螺旋的移動」と共役です．しかし，双曲的合同変換を表す一次分数変換では，斜航型 になりません．